Dynamik des Plasmas I

Grundgleichungen, Plasma in gekreuzten Feldern

Von Arnulf Schlüter

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen

(Z. Naturforschg. **5a**, 72—78 [1950]; eingegangen am 20. Juni 1949)

Als Modell eines Plasmas wird eine Flüssigkeit betrachtet, die aus zwei entgegengesetzt geladenen Komponenten besteht. Es wird die zugehörige Bewegungs- und Diffusionsgleichung unter Berücksichtigung der gegenseitigen Reibung und der elektromagnetischen Wechselwirkung abgeleitet. Das Induktionsgesetz wird auf eine einfache Form gebracht.

Die so gewonnenen Grundgleichungen werden auf den Fall angewendet, daß die elektrischen und magnetischen Felder statisch sind. Es wird gezeigt, daß es keinen Sinn hat, von einer Verminderung der Leitfähigkeit durch ein Magnetfeld und von einem Hall-Effekt im Plasma zu reden, da die ponderomotorischen Kräfte des elektrischen Stromes im Magnetfeld durch Druckkräfte kompensiert werden müssen, die ihrerseits als eingeprägte elektromotorische Kräfte den Strom so beeinflussen, daß (unter bestimmten Bedingungen) die Stromdichte im Plasma überall gerade so groß ist, wie sie ohne Magnetfeld bei demselben Druck wäre.

Es wird dann (unter der Annahme druckunabhängiger Leitfähigkeit) der Fall geschlossen integriert, daß das Magnetfeld nur von dem Strom, der als Wirkung eines homogenen elektrischen Feldes fließt, herrührt. Das Plasma zieht sich dann zu einem Faden zusammen.

Ein Gas heißt ein *Plasma*, wenn es so stark ionisiert ist, daß die Anwesenheit der geladenen Teilchen seine Eigenschaften wesentlich beeinflußt. Bei einem Plasma tritt dadurch, daß der Bewegung der geladenen Teilchen sowohl ein Impulsstrom als auch ein elektrischer Strom entspricht, eine Verquikkung der Hydrodynamik mit der Elektrodynamik ein. Das Verhalten eines Plasmas wird darüber hinaus im Magnetfeld noch unübersichtlicher, weil dort schon eine makroskopische Bewegung des Plasmas Diffusionsprozesse, also elektrischen Strom hervorruft, während umgekehrt ein Strom im Magnetfeld eine Kraft auf das Plasma ausübt.

Das Ziel der Untersuchungen, von denen die erste hiermit vorgelegt wird, ist die Betrachtung eines einfachen Modells eines Plasmas, das diese Wechselwirkungen enthält, trotzdem aber in einigen Fällen zu durchsichtigen Ergebnissen führt. Uns interessiert hier nicht, wie die Ladungsträger im Plasma erzeugt werden, vielmehr sehen wir das Plasma als gegeben an. Für diese Fragen sei auf einem ausführlichen Bericht von Rompe und Steenbeck[1] verwiesen. Wir werden auch nicht die allgemeinsten Gleichungen eines Gemisches verschiedener geladener und ungeladener Gassorten betrachten[2], sondern führen von Anfang an eine Reihe vereinfachender Annahmen ein:

1. Der Ionisationsgrad sei so hoch, daß die Wechselwirkung der geladenen Teilchen untereinander die der geladenen Teilchen mit den neutralen Teilchen so sehr überwiegt, daß von der Gegenwart der neutralen Materie ganz abgesehen werden kann. Das ist wegen der erheblich größeren Wirkungsquerschnitte der geladenen Teilchen gegeneinander schon bei mäßiger Ionisierung der Fall.*

2. Es gebe nur zwei Sorten geladener Teilchen mit entgegengesetzt gleich großen Ladungen, die wir kurz als Ionen und Elektronen bezeichnen werden. Wir werden aber die Elektronenmasse m_e nicht gegen die Ionenmasse m_i vernachlässigen, so daß die Formeln ungeändert für ein Gemisch negativer und positiver Ionen gelten.

3. Die Abweichungen des Drucktensors der beiden Komponenten (gemessen im mit der makroskopischen Geschwindigkeit der *einzelnen* Komponenten mitbewegten Koordinatensystem) vom hydrostatischen Druck sei vernachlässigbar. D. h. insbesondere, daß wir von der inneren Reibung jeder Komponente für sich absehen wollen.

4. Das Plasma sei quasineutral, d. h. die Dichte der Ionen und Elektronen sei überall und stets fast genau

[1] R. Rompe u. M. Steenbeck, Der Plasmazustand der Gase, Ergebn. exakt. Naturwiss. 18, 257—367 [1939].

[2] Hierzu sei auf das Buch von S. Chapman u. T. G. Cowling, The mathematical theory of nonuniform gases, Cambridge 1939, hingewiesen, in welchem den ionisierten Gasen ein eigenes Kapitel (S. 319—358) gewidmet ist.

* Anm. bei der Korr.: In einer folgenden Untersuchung wird der Fall wesentlicher Mitwirkung eines Neutralgases betrachtet.

gleich groß. Die Berechtigung dieser Annahme wird im folgenden kurz diskutiert werden.

Die hier betrachtete Modelltheorie eines Plasmas hat für die Theorie der Gasentladungen nur eine beschränkte Bedeutung, da bei diesen der Mechanismus der Entstehung und Vernichtung der Ladungsträger von ausschlaggebender Bedeutung ist. Von Wichtigkeit sind die hier angestellten Überlegungen für die Deutung des Verhaltens der Gasentladungen in magnetischen Feldern, für die Entstehung von Plasmaschwingungen und die damit zusammenhängenden Fragen. Das Hauptinteresse dieser Untersuchung liegt auf astrophysikalischem Gebiete. Das Innere aller Sterne, mit Ausnahme der überdichten Zwerge (bei denen Entartungen der Elektronen und Ionen [3] auftreten), stellt ein Plasma dar, bei dem alle unsere Voraussetzungen gerechtfertigt erscheinen. Auch die Atmosphären der heißen Sterne und die Sonnenkorona sowie die sog. H II-Regionen der interstellaren Materie [*] stellen ein ideales Plasma dar. Erst durch eine Plasmatheorie erhalten die Theorien der Erzeugung von Höhenstrahlung auf Sternen [4] und im interstellaren Raume [5] sowie die Theorie der Entstehung stellarer und interstellarer Magnetfelder [6] eine strenge Begründung.

Grundgleichungen

Die nichtrelativistische Bewegungsgleichung eines Teilchens der Ladung e und der Masse m in einem Magnetfeld lautet bekanntlich:

$$m \frac{d\mathfrak{v}}{dt} = e\,\mathfrak{E} + \frac{e}{c}\,[\mathfrak{v}\,\mathfrak{H}] + \mathfrak{k}, \tag{1}$$

wenn unter $\mathfrak{k}$ alle (als geschwindigkeitsunabhängig vorausgesetzten) nichtelektrischen Kräfte, die auf das Teilchen wirksam sind, verstanden werden. Betrachtet man ein aus solchen Teilchen bestehendes Gas, so folgt hieraus, unter Vernachlässigung der inneren Reibung, die „makroskopische" Bewegungsgleichung

$$m \frac{d\mathfrak{V}}{dt} = e\,\mathfrak{E} + \frac{e}{c}\,[\mathfrak{V}\,\mathfrak{H}] + \mathfrak{K}, \tag{2}$$

wenn mit $\mathfrak{V}$ die hydrodynamische Geschwindigkeit und mit d/dt die substantielle Differentiation bezeichnet wird. Unter $\mathfrak{K}$ sind hierbei die auf das Teilchen direkt wirkenden Kräfte (Schwerefelder, Strahlungsdruck) und auch die Wirkung eines Dichte- oder Temperaturgefälles (Gasdruck bzw. Thermodiffusionskraft) zusammengefaßt.

Daß auch dann, wenn die Stoßzahl der Teilchen wesentlich geringer ist als die Frequenz, mit der sie im Magnetfeld $\mathfrak{H}$ umlaufen (Larmor-Frequenz), der Druckgradient wie eine äußere Kraft wirkt, führt auf eine Reihe von scheinbaren Paradoxien, die zum größten Teil von T. G. Cowling [7] geklärt worden sind. In $\mathfrak{K}$ sind jedoch *keine* Anteile enthalten, die von den räumlichen Ableitungen des Magnetfeldes (etwa in der Form grad $\mathfrak{H}^2$) abhängen, d. h. der sog. magnetische Druck ist vollständig in dem Gliede mit $[\mathfrak{V}\,\mathfrak{H}]$ enthalten (das im allgemeinen kein Potential haben wird, so daß das Wort „Druck" am besten ganz vermieden wird). Über die hiermit zusammenhängenden scheinbaren Paradoxien und über die Quelle der in der Literatur weit verbreiteten irrtümlichen Anschauungen hierüber soll an anderer Stelle berichtet werden.

Als Modell eines „Plasmas" betrachten wir nun das Gemisch aus zwei Gasen — Ionen (Index i, Ladung $+e$) und Elektronen (Index e, Ladung $-e$) —, die beide für sich einer Bewegungsgleichung wie (2) gehorchen, deren Bewegungen aber durch ein Reibungsglied miteinander gekoppelt sind. Wenn beide Gase gleiche Dichte besitzen ($N_\mathrm{i} = N_\mathrm{e} = N\,[\mathrm{cm}^{-3}]$), so ist der einfachste mit dem Impulssatz verträgliche Ansatz offenbar:

$$\begin{aligned} m_\mathrm{i} \frac{d_\mathrm{i}}{dt} \mathfrak{V}_\mathrm{i} + \frac{m_\mathrm{i}\, m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{i} + m_\mathrm{e}}\, \gamma\, (\mathfrak{V}_\mathrm{i} - \mathfrak{V}_\mathrm{e}) &= e\,\mathfrak{E} + \frac{e}{c}\,[\mathfrak{V}_\mathrm{i}\,\mathfrak{H}] + \mathfrak{K}_\mathrm{i}, \\ m_\mathrm{e} \frac{d_\mathrm{e}}{dt} \mathfrak{V}_\mathrm{e} - \frac{m_\mathrm{i}\, m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{i} + m_\mathrm{e}}\, \gamma\, (\mathfrak{V}_\mathrm{i} - \mathfrak{V}_\mathrm{e}) &= -\,e\,\mathfrak{E} - \frac{e}{c}\,[\mathfrak{V}_\mathrm{e}\,\mathfrak{H}] + \mathfrak{K}_\mathrm{e}, \end{aligned} \tag{3}$$

wobei die substantiellen Ableitungen definiert sind durch:

$$\frac{d_\mathrm{i}}{dt} \mathfrak{V}_\mathrm{i} = \frac{\partial}{\partial t} \mathfrak{V}_\mathrm{i} + (\mathfrak{V}_\mathrm{i}\,\mathrm{grad})\,\mathfrak{V}_\mathrm{i}\,; \quad \frac{d_\mathrm{e}}{dt} \mathfrak{V}_\mathrm{e} \text{ entsprechend.}$$

Die Form (3) ergibt sich für stationäre Zustände aus der Enskog-Chapmanschen Gastheorie [2]; für nichtstationäre Zustände haben wir im Anhang eine Be-

[3] L. Biermann, Z. Naturforschg. **3a**, 481—485 [1948].

[*] Das ist die Umgebung heißer Sterne, in der der interstellare Wasserstoff quantitativ ionisiert ist.

[4] E. Bagge u. L. Biermann, Naturwiss., im Druck; L. Biermann u. E. Bagge, Z. Naturforschg. **4a**, 303—315 [1949].

[5] E. Fermi, Physic. Rev. **75**, 1169—1174 [1949]; A. Schlüter, Vortrag auf der Physikertagung in Hamburg, Ostern 1949.

[6] L. Biermann, Z. Naturforschg. **5a**, 65 [1950]; A. Schlüter u. L. Biermann in Vorbereitung.

[7] T. G. Cowling, Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. **90**, 140 [1929] u. **92**, 407 [1932].

gründung gegeben, da durchaus nicht mehr trivial ist, daß γ von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ unabhängig ist, wenn die Teilchen zwischen zwei Stößen Zeit zum Durchlaufen vieler Larmor-Kreise haben. Es ergibt sich für γ [$\sec^{-1}$] die anschauliche Deutung als mittlere Frequenz der (auslöschenden) Stöße zwischen Ionen und Elektronen.

Aus diesen Gleichungen eliminieren wir mit Hilfe der „Massengeschwindigkeit" $\mathfrak{V}$ und der Diffusionsgeschwindigkeit $\mathfrak{d}$ die Partialgeschwindigkeiten und erhalten durch einfache algebraische Umformung:

„Bewegungsgleichung":

$$(m_i + m_e) \frac{d_1}{dt} \mathfrak{V} = \frac{e}{c} [\mathfrak{d}\, \mathfrak{H}] + (\mathfrak{K}_i + \mathfrak{K}_e), \quad (4\,a)$$

„Diffusionsgleichung":

$$m_i m_e \left(\frac{d_2}{dt} \mathfrak{d} + \gamma \mathfrak{d} \right) = e (m_i + m_e) \left\{ \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{V}}{c} \mathfrak{H} \right] \right\} \quad (4\,b)$$

$$- e (m_i - m_e) \left[\frac{\mathfrak{d}}{c} \mathfrak{H} \right] + m_e \mathfrak{K}_i - m_i \mathfrak{K}_e ,$$

mit

$$\mathfrak{V} = (m_i \mathfrak{V}_i + m_e \mathfrak{V}_e)/(m_i + m_e) ; \quad \mathfrak{d} = \mathfrak{V}_i - \mathfrak{V}_e$$

und

$$\frac{d_1}{dt} \mathfrak{V} = \frac{\partial \mathfrak{V}}{\partial t} + (\mathfrak{V} \operatorname{grad}) \mathfrak{V} + \frac{m_i m_e}{(m_i + m_e)^2} (\mathfrak{d} \operatorname{grad}) \mathfrak{d}, \quad (5\,a)$$

$$\frac{d_2}{dt} \mathfrak{d} = \frac{\partial \mathfrak{d}}{dt} + (\mathfrak{V} \operatorname{grad}) \mathfrak{d} + (\mathfrak{d} \operatorname{grad}) \mathfrak{V} \quad (5\,b)$$

$$- \frac{m_i - m_e}{m_i + m_e} (\mathfrak{d} \operatorname{grad}) \mathfrak{d} .$$

Die Gln. (5) ergeben sich durch die Mischung der substantiellen Ableitungen der beiden Komponenten. Da in fast allen Fällen $\mathfrak{d}$ eine sehr kleine Geschwindigkeit ist, kann in der Regel in beiden Gleichungen der letzte Term vernachlässigt werden; Gl. (5 a) reduziert sich dann auf die gewöhnliche substantielle Differentiation bezüglich der Massengeschwindigkeit, während in (5 b) das Glied $(\mathfrak{V} \operatorname{grad}) \mathfrak{d}$, das die Konvektion der Diffusionsgeschwindigkeit darstellt, und das Glied $(\mathfrak{d} \operatorname{grad}) \mathfrak{V}$, das eine zusätzliche Diffusion durch den Gradienten der Massengeschwindigkeit bedeutet, von interessanter Größe sein können. Die Glieder mit $(\mathfrak{d} \operatorname{grad}) \mathfrak{d}$ rühren daher, daß der Gesamtdruck nicht streng hydrostatisch ist, da wir vorausgesetzt hatten, daß die Partialdrucke in *dem* Koordinatensystem skalar sind, das mit der Geschwindigkeit der betreffenden Komponente mitbewegt wird.

Fügt man nun zu den Gln. (4) noch die Definition der Stromdichte

$$\mathfrak{j} = e N \mathfrak{d} \quad (N_i = N_e = N!),$$

so beschreiben diese, zusammen mit den Maxwellschen Gleichungen ($\mu = 1$; $\varepsilon = 1$) das Verhalten des Plasma-Modells vollständig: (4 a) liefert das Bewegungsgesetz und (4 b) tritt an die Stelle des Ohmschen Gesetzes.

Häufig ist es zweckmäßig, den Gln. (4) eine etwas veränderte Gestalt dadurch zu geben, daß man aus der Diffusionsgleichung das Glied mit $[\mathfrak{d}\, \mathfrak{H}]$ mittels der Bewegungsgleichung eliminiert und dann schreibt:

$$\frac{m_i m_e}{m_i + m_e} \left\{ \frac{d_2}{dt} \mathfrak{d} + \gamma \mathfrak{d} \right\} = e\, \mathfrak{E}^m + e\, \mathfrak{E}^e , \quad (6)$$

mit

$$\mathfrak{E}^m = \mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{V}}{c} \mathfrak{H} \right], \quad (7)$$

$$e\, \mathfrak{E}^e = \frac{m_i \mathfrak{K}_i - m_e \mathfrak{K}_e}{m_i + m_e} - (m_i - m_e) \frac{d_1}{dt} \mathfrak{V}. \quad (8)$$

$\mathfrak{E}^m$ ist die elektrische Feldstärke, die in dem mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{V}$ mitbewegten Koordinatensystem gemessen wird, während $\mathfrak{E}^e$ die „eingeprägte elektromotorische Kraft" bezeichnet und die Wirkung der nichtelektrischen Kräfte auf die Diffusion, also auf den elektrischen Strom, zusammenfaßt.

Wir wollen nun noch für die Kräfte $\mathfrak{K}$ einen speziellen Ansatz machen, indem wir annehmen, daß ein Druckgradient und ein Schwerefeld gemeinsam wirken:

$$\mathfrak{K}_i = - \frac{1}{N} \operatorname{grad} p_i + m_i \mathfrak{g}; \quad \mathfrak{K}_e \text{ entsprechend} \quad (9)$$

(p_i = Partialdruck der Ionen, $\mathfrak{g}$ = Schwerebeschleunigung).

Mit $p = p_i + p_e$; $\varrho_i = N m_i$, $\varrho = \varrho_i + \varrho_e$ [g cm^{-3}] und dem scheinbaren Schwerefeld $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} - \frac{d}{dt} \mathfrak{V}$, das insbesondere auch die Zentripetalbeschleunigung enthält, wird aus der Bewegungsgleichung die Gleichung des hydrodynamischen Gleichgewichtes:

$$\operatorname{grad} p = \varrho\, \bar{\mathfrak{g}} + 1/c\, [\mathfrak{j}\, \mathfrak{H}], \quad (10)$$

während sich als eingeprägte elektromotorische Kraft ergibt:

$$e\, \mathfrak{E}^e = (m_i - m_e) \bar{\mathfrak{g}} - \frac{1}{\varrho} (m_i \operatorname{grad} p_i - m_e \operatorname{grad} p_e) . \quad (11)$$

Wenn die Elektronentemperatur gleich der Ionentemperatur ist, folgt aus der gleichen Dichte $p_i = p_e = p/2$, und damit wird

$$e\, \mathfrak{E}^i = (m_i - m_e) \left(\bar{\mathfrak{g}} - \frac{1}{2\varrho} \operatorname{grad} p \right) . \quad (11\,a)$$

Es ist besonders zu beachten, daß, wenn ein Magnetfeld vorhanden ist, die Gln. (4 a) und (4 b) bzw.

(10) und (11) i. a. nicht mehr unabhängig voneinander betrachtet werden können, obschon in (11) das Magnetfeld gar nicht explizit auftritt. Es wird im folgenden gezeigt werden, daß deswegen die üblichen Betrachtungen über die Leitfähigkeit eines Plasmas in einem Magnetfeld unzulänglich sind und zu vollkommen irrigen Ergebnissen führen können.

Induktionsgesetz

Von den zu den Gln. (4) hinzutretenden Maxwell-Gleichungen gibt man dem Induktionsgesetz

$$\frac{\partial \mathfrak{H}}{\partial t} = - c \operatorname{rot} \mathfrak{E}$$

häufig zweckmäßig eine andere Gestalt: Man definiert einen Operator $D\,[\mathrm{sec}^{-1}]$ so, daß er, angewandt auf ein beliebiges Vektorfeld $\mathfrak{A}$, die Änderung des Flusses von $\mathfrak{A}$ durch eine mit dem Geschwindigkeitsfelde $\mathfrak{B}$ mitbewegte und mitdeformierte, infinitesimale Fläche dF angibt*:

$$dF \cdot D\mathfrak{A} = \frac{d}{dt}(\mathfrak{A}_n\, dF),$$

$$D\mathfrak{A} = \frac{\partial}{\partial t}\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \operatorname{div} \mathfrak{A} - \operatorname{rot}[\mathfrak{B}\,\mathfrak{A}];$$

insbesondere bedeutet $D\mathfrak{A} = 0$, daß die Feldlinien von $\mathfrak{A}$ an der mit $\mathfrak{B}$ sich bewegenden Materie gewissermaßen festhängen. Wendet man D auf das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ an, so wird wegen $\operatorname{div} \mathfrak{H} = 0$ und wegen des Induktionsgesetzes

$$D\mathfrak{H} = - c \operatorname{rot} \mathfrak{E}^{\mathrm{m}},$$

woraus mit (6) folgt:

$$\frac{1}{c} D\mathfrak{H} = \operatorname{rot} \mathfrak{E}^{\mathrm{e}} - \frac{m_{\mathrm{i}}\, m_{\mathrm{e}}}{e\,(m_{\mathrm{i}} + m_{\mathrm{e}})} \operatorname{rot}\left(\frac{d_2}{dt}\mathfrak{d} + \gamma\,\mathfrak{d}\right).$$

Der spezielle Ansatz (11 a) für die eingeprägte elektromotorische Kraft ergibt

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E}^{\mathrm{e}} = \frac{m_{\mathrm{i}} - m_{\mathrm{e}}}{e} \operatorname{rot} \bar{\mathfrak{g}} + \frac{m_{\mathrm{i}} - m_{\mathrm{e}}}{2\,e\,(m_{\mathrm{i}} + m_{\mathrm{e}})} \left[\operatorname{grad} p, \operatorname{grad} \frac{1}{N}\right].$$

Wenn man hierbei den meist zu vernachlässigenden Einfluß des „Strombeschleunigungs"-Gliedes $\frac{d_2}{dt}\mathfrak{d}$ außer Betracht läßt, gibt es zweierlei Möglichkeiten, den magnetischen Fluß durch eine mit dem Plasma mitgeführte geschlossene Kurve zu ändern; einmal die spontane Änderung durch das Reibungsglied $\gamma\,\mathfrak{d}$, das dem Abklingvorgang in einem Leiter nach der Maxwellschen Theorie entspricht, und zweitens die Änderung durch eine Rotation der eingeprägten EMK. Hier trägt im Glied $\operatorname{rot} \bar{\mathfrak{g}}$ nur die Zentrifugalbeschleunigung bei geeigneter nichtstarrer Rotation bei, während der zweite Term eine Neigung der isobaren gegen die isothermen Flächen voraussetzt.

* Für $D\mathfrak{A}$ wird in der Literatur häufig $\underline{\dot{\mathfrak{A}}}$ geschrieben.

Bevor wir die Grundgleichungen für verschiedene Anwendungen spezialisieren, wollen wir noch die Tragweite der Bedingung gleicher Dichte der positiv und negativ geladenen Teilchen diskutieren. Wir betrachten hierzu einen speziellen Fall, nämlich das Gleichgewicht in einem Schwerefeld bei Abwesenheit magnetischer Felder. Gl. (10) ergibt dann die bekannte Beziehung

$$\operatorname{grad} p = \varrho\,\mathfrak{g},$$

die im isothermen Fall die barometrische Dichteformel zur Folge hat. Nach (11 a) fließt dann so lange ein Strom, bis sich eine elektrische Raumladung eingestellt hat, die die eingeprägte elektromotorische Kraft kompensiert, d. h. bis gilt ($p_{\mathrm{i}} = p_{\mathrm{e}} = p/2$):

$$e\,\mathfrak{E} = - e\,\mathfrak{E}^{\mathrm{e}} = \frac{m_{\mathrm{i}} - m_{\mathrm{e}}}{2\,\varrho}(\operatorname{grad} p - 2\,\varrho\,\mathfrak{g})$$

$$= - \frac{m_{\mathrm{i}} - m_{\mathrm{e}}}{2}\,\mathfrak{g}.$$

Wegen $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi e\,(N_{\mathrm{i}} - N_{\mathrm{e}})$ und $\operatorname{div} \mathfrak{g} = -4\pi G\,(N_{\mathrm{i}}\, m_{\mathrm{i}} + N_{\mathrm{e}}\, m_{\mathrm{e}})$ ist dann also

$$e^2\,(N_{\mathrm{i}} - N_{\mathrm{e}}) = G\,\frac{m_{\mathrm{i}} - m_{\mathrm{e}}}{2}\,(N_{\mathrm{i}}\, m_{\mathrm{i}} + N_{\mathrm{e}}\, m_{\mathrm{e}})$$

(G = Gravitationskonstante), d. h.:

$$\frac{N_{\mathrm{i}} - N_{\mathrm{e}}}{N_{\mathrm{i}} + N_{\mathrm{e}}} \approx 2{,}3 \cdot 10^{-35}.$$

Eine Entmischung der Teilchen verschiedener Ladungsvorzeichen ist in allen interessierenden Fällen so gering, daß sie in den mechanischen Gleichungen und in dem Zusammenhang zwischen Stromdichte und Diffusionsgeschwindigkeit vernachlässigt werden kann; sie wirkt allein mit der durch sie erzeugten Raumladung, die aber explizit in den Gleichungen nicht auftritt.

Leitfähigkeit des Plasmas

Wenn die Massengeschwindigkeit $\mathfrak{B}$, die Gravitationsbeschleunigung $\mathfrak{g}$ und die Änderung der Diffusionsgeschwindigkeit $\frac{d_2}{dt}\mathfrak{d}$ verschwinden, so wird aus den Gl. (6), (10) und (11 a)

$$\operatorname{grad} p = \frac{1}{c}[\mathfrak{j}, \mathfrak{H}] \tag{12}$$

Plasma	Elektronendichte $\log N$ [cm^{-3}]	Elektronentemperatur $\log T$	Korrekturfaktor $\log A_1$	Mittlere Stoßfrequenz $\log \gamma$ [sec^{-1}]	Leitfähigkeit $\log \sigma$ [sec^{-1}]	Eff. Wirkungsquerschnitt $\log q$ [cm^2]
Sonnenmittelpunkt	26	7,3	0,9	16,1	18,3	−19,1
Hg-Höchstdrucklampe	17	3,9	0,8	12,2	13,2	−11,3
Sonnen-Photosphäre, Bogenentladung	14	3,8	1,0	9,5	12,9	−11,9
Glimmentladung	13	4,4	1,2	7,8	13,6	−12,9
Sonnenkorona	8	6,0	1,4	0,6	15,8	−15,9
	4	6,0	1,6	−3,2	15,6	−15,7
H II-Regionen*	1	4,0	1,5	−3,3	12,7	−11,8
H I-Regionen*	−3	3,5	1,5	−6,4	11,8	−10,6
		2,5	1,5	−5,1	10,6	− 8,9

* des interstellaren Mediums.

Tab. 1. Eigenschaften typischer Plasmen.

$$\text{und } \mathfrak{j} = \sigma(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e) \text{ mit } \sigma = \frac{e^2\,\varrho}{\gamma\, m_i\, m_e}\,[\text{sec}^{-1}]. \quad (13)$$

Wenn außerdem die eingeprägte EMK, die hier allein vom Druckgradienten herrührt, verschwindet, gilt einfach das Ohmsche Gesetz: $\mathfrak{j} = \sigma\mathfrak{E}$.

Den Betrag der Leitfähigkeit kann man mit Hilfe der von Chapman-Cowling[2] angegebenen Beziehungen berechnen. Es wird dort (S. 179) die erste Näherung zum Diffusionskoeffizienten D_{12} angegeben, die wir für den Fall einfach geladener Ionen und für $m_e \ll m_i$ so schreiben können:

$$D_{12} \approx \frac{3}{16\,N}\left(\frac{2\,k\,T}{\pi\, m_e}\right)^{1/2}\left(\frac{2\,k\,T}{e^2}\right)^2\frac{1}{A_1},$$

$$A_1 \approx \ln(1 + 4\,k^2\,T^2\,N^{-2/3}\,e^{-4}),$$

wobei D_{12} mit der Leitfähigkeit σ und der Stoßfrequenz γ verknüpft ist durch:

$$\gamma = \frac{k\,T}{m_e}\,\frac{1}{D_{12}}; \quad \sigma = \frac{N\,e^2}{k\,T}\,D_{12}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen ist Tab. 1 berechnet, bei der noch der effektive Wirkungsquerschnitt q für Stöße zwischen Elektronen und Ionen und der Korrekturfaktor A_1, der die Wirkung der fernen Vorübergänge darstellt, angegeben sind.

Die Angabe von q gestattet es, abzuschätzen bis zu welchem Ionisationsgrad x der Einfluß der neutralen Atome vernachlässigt werden darf. Als Maximalwert ergibt sich $x \ll q_g/q$, wobei q_g den gaskinetischen Wirkungsquerschnitt der neutralen Teilchen (von der Größenordnung 10^{-15} cm^2) bedeutet. In den Teilen der interstellaren Materie, in denen der Wasserstoff im wesentlichen nicht ionisiert ist (sog. H I-Regionen), genügt also bereits ein Ionisationsgrad der Ordnung 10^{-5} (der meistenteils erreicht wird), um unser Plasmamodell anwendbar zu machen.

Stromleitungen im Magnetfeld[8]

Ist in einem ruhenden Plasma ein zeitlich konstantes Magnetfeld parallel zu $(\mathfrak{E} + \mathfrak{E}^e)$ und damit (im stationären Fall) parallel zu $\mathfrak{j}$ vorhanden, so beeinflußt es die Stromleitung nicht. Wenn aber eine Komponente senkrecht hierzu auftritt, muß eine simultane Lösung der Gln. (12) und (13) gesucht werden. Das übliche Verfahren ist, die Gleichungen in einer zu (4b) analogen Form zugrunde zu legen, in der die Stromdichte noch mit dem Magnetfeld vektoriell multipliziert auftritt, und diese Gleichung *(ohne* Druckglieder) durch den Ansatz

$$\mathfrak{j} = \sigma'\,\mathfrak{E} + \frac{\sigma''}{H}[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}] + \frac{\sigma'''\,E}{H}\,\mathfrak{H}$$

zu lösen. Es würde dann folgen (σ wie oben, $\beta = (m_i - m_e)/e\varrho c$)

$$\sigma' = \sigma/(1 + H^2\,\beta^2\,\sigma^2), \qquad \sigma'' = -H\,\beta\,\sigma^2/(1 + H^2\,\beta^2\,\sigma^2)$$

(direkte Leitfähigkeit) („Hall"-Leitfähigkeit)

$$\sigma''' = H\,\beta^2\,\sigma'''\,(\mathfrak{E}\,\mathfrak{H})/E\,(1 + H^2\,\beta^2\,\sigma^2).$$

Es ist aber sofort zu sehen, daß diese Lösung ohne Druckgradient mit (12) nicht zu vereinbaren ist, d. h. *ohne* Druckgradienten würde sich das ganze Plasma in Bewegung setzen und nach den Gln. (7) würde erst dann ein stationärer Zustand ($\mathfrak{E}^e = 0$) eintreten, wenn

[8] Vgl. hierzu T. G. Cowling, The electrical conductivity of an ionized gas in a magnetic field, with applications to the solar atmosphere and the ionosphere, Proc. Roy. Soc. [London], Ser. A **183**, 453—479 [1945].

$[\mathfrak{j}\mathfrak{H}] = 0$ und $[\mathfrak{E}^m \mathfrak{H}] = 0$, wenn also die Geschwindigkeit

$$\mathfrak{V} = \frac{1}{c} \frac{[\mathfrak{E}\,\mathfrak{H}]}{\mathfrak{H}^2} + \text{const}\,\mathfrak{H}$$

mit beliebiger Komponente in Richtung von $\mathfrak{H}$ erreicht ist. Es würde dann überhaupt kein Strom fließen.

Wird diese Bewegung z. B. dadurch verhindert, daß das Plasma in einem Gefäß eingeschlossen ist, so muß im stationären Zustand ein Druck nach Gl. (12) auftreten, dessen Wirkung auf den Strom man dann aber im Gliede $\mathfrak{E}^e = -\frac{1}{2 e \varrho}\,\text{grad}\,p$ mit berücksichtigen muß. Diese Wirkung besteht einfach darin, daß anfänglich ein zusätzlicher Strom in Richtung von grad p fließt, bis eine Raumladung auftritt, die ein zusätzliches Feld $\mathfrak{E}^r$ erzeugt, so daß der Druckterm gerade kompensiert wird. Die vollständige Lösung lautet dann also

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}^a + \mathfrak{E}^r \quad (\mathfrak{E}^a = \text{angelegtes Feld}, \quad \mathfrak{E}^r = \text{Raumladungsfeld}),$$

$$e\,\mathfrak{E}^r = \frac{1}{\varrho}(m_i\,\text{grad}\,p_i - m_e\,\text{grad}\,p_e) = -e\,\mathfrak{E}^e,$$

$\mathfrak{j} = \sigma\,\mathfrak{E}^a$, σ wie oben [Gl. (13)] *ohne* Magnetfeld,

$$\text{grad}\,p = \frac{1}{c}[\mathfrak{j}, \mathfrak{H}]. \tag{14}$$

Hiernach wird das Plasma so lange in die Richtung $[\mathfrak{E}^a \mathfrak{H}]$ gedrängt, bis der entstehende Druckgradient der Lorentz-Kraft auf den Strom das Gleichgewicht hält. *Die Stromdichte selbst wird nur durch den Einfluß des hierdurch veränderten Druckes auf die Leitfähigkeit σ, nicht aber explizit vom Magnetfeld beeinflußt;* hängt σ von p nicht ab (das ist bei konstanter Temperatur eine gute Näherung, s. o.), so wird der Gesamtstrom und die Stromverteilung durch das Magnetfeld überhaupt nicht beeinflußt — außer dem trivialen Effekt, daß die Stromdichte dort verschwindet, wo das Plasma völlig weggefegt ist.

Voraussetzung zu dieser Lösung ist natürlich, daß die eingeprägte Feldstärke durch eine Raumladung kompensiert werden kann, d.h. daß rot $\mathfrak{E}^r = 0$. Wenn das nicht der Fall ist, muß eine allgemeinere Lösung der Gln. (12) und (13) gesucht werden. Wenn die Felder $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ homogen sind, existiert (in einem Kasten) aber stets die Lösung (14).

Stromfäden

Zu den Gln. (14) tritt noch die Gleichung

$$c\,\text{rot}\,\mathfrak{H} = 4\pi\,\mathfrak{j}. \tag{15}$$

Dieses System kann integriert werden, wenn das Magnetfeld $\mathfrak{H}$ *nur* aus dem Felde des Stromes besteht, wenn ferner das angelegte elektrische Feld homogen ist und eine geeignete Annahme über die Abhängigkeit der Leitfähigkeit vom Druck gemacht wird.

Wir führen Zylinderkoordinaten (r, φ, z) so ein, daß die z-Achse parallel zu $\mathfrak{E}^a$ liegt. Unter Beachtung der Symmetrie des Problems lautet das zu lösende System dann

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{1}{c} H \mathrm{j}, \quad \mathrm{j} = \sigma E^a, \quad 4\pi\mathrm{j} = \frac{c}{r}\frac{d}{dr}(H r). \tag{16}$$

Wenn wir annehmen, daß die Temperatur eindeutig vom Druck abhängt und damit die Leitfähigkeit als eine Funktion nur des Druckes angesehen werden kann, folgt für p die Differentialgleichung:

$$4\pi\,\sigma(p) = -\frac{c^2}{r\,E^{a^2}}\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{\sigma(p)}\frac{dp}{dr}\right). \tag{17}$$

Ihre Lösung läßt sich für den einfachen und wichtigen Fall, der im wesentlichen der Bedingung konstanter Temperatur entspricht,

$$\sigma(p) = \sigma_0 \quad \text{für} \quad p > 0$$

explizit angeben:

$$p = p_0 - \frac{\pi\,\sigma_0^2\,E^{a^2}}{c^2} r^2 + \text{const}\,\ln r. \tag{18}$$

Damit die Lösung auf der Achse ($r = 0$) nicht singulär wird, muß const $= 0$ gesetzt werden. Es fällt dann also der Druck vom Mittelpunktsdruck p_0 (Integrationskonstante) quadratisch mit r ab und wird in einer endlichen Entfernung (r_0) von der Achse Null, so daß für den Querschnitt des dadurch gebildeten Fadens gilt:

$$Q = \pi\,r_0^2 = c^2 p_0/\mathrm{j}^2; \quad \mathrm{j} = \sigma E^a. \tag{19}$$

Statt des Mittelpunktdruckes p_0 kann man, unter Berücksichtigung der Zustandsgleichung des Plasmas ($p = 2\,NkT$, k = Boltzmann-Konstante) und des quadratischen Druckabfalles für über den Querschnitt konstante Temperatur, die mittlere Dichte in der Säule $\overline{N} = p_0/4\,kT$ einführen. Dann wird

$$Q = 4\,c^2\,\overline{N} k\,T/\mathrm{j}^2, \tag{20}$$

während für den Gesamtstrom I folgt:

$$I = Q\,\mathrm{j} = 2\,c\sqrt{\overline{N}\,Q\,k\,T}. \tag{21}$$

Bei festgehaltener Gesamtteilchenzahl in der Säule, d. h. bei festem $\overline{N}Q$ hängt also der Gesamtstrom durch die Säule weder von der Stärke des angelegten elektrischen Feldes, noch von der Leitfähigkeit ab. Der Stromfaden kontrahiert sich bei größerer Stromdichte infolge des Magnetfeldes gerade um so viel, daß das Produkt $Qj = I$ konstant bleibt.

Wenn mit dem Stromtransport zugleich ein einseitiger Massentransport verbunden ist, d. h. wenn $\mathfrak{V} \neq 0$, aber parallel zu $\mathfrak{E}^a$, ist das zusätzlich auftretende Glied mit $[\mathfrak{V}\mathfrak{H}]$ [Gl. (7)] radial gerichtet und bewirkt nur eine entsprechende Änderung der Raumladungsfeldstärke $\mathfrak{E}^r$, ohne die obigen Ergebnisse zu beeinflussen.

Der Verf. ist Hrn. Prof. Dr. Biermann für die Anregung zu dieser Untersuchung und für dauernde Unterstützung bei ihrer Durchführung zu sehr großem Dank verpflichtet.

Anhang: Begründung der Widerstandsformel

Es soll gezeigt werden, daß auch in Anwesenheit eines starken Magnetfeldes der einfache Ansatz der Gl. (3), in dem nur die makroskopische Bewegung eingeht, vernünftig ist, obwohl die Bahnen der einzelnen Teilchen infolge der Larmor-Bewegung erheblich anders aussehen als diese. Zur Vereinfachung nehmen wir an, daß die Ionen praktisch unbeweglich seien.

Ein frei fliegendes Elektron gehorcht der Bewegungsgleichung

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{v}_e = -\frac{e}{m}\left\{\mathfrak{E} + \left[\frac{\mathfrak{v}_e}{c}\,\mathfrak{H}\right]\right\}; \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}(t),\ \mathfrak{H} = \mathfrak{H}(t).$$

Wenn wir annehmen, daß in dem durchflogenen Raumstücke die Feldstärken praktisch homogen sind, ist die rechte Seite nur eine Funktion von $\mathfrak{v}_e$ und t, die in $\mathfrak{v}_e$ linear ist. Die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_e$ selbst ist dann eine Funktion der Zeit und der Anfangsbedingung allein.

Wir betrachten nun die Gruppe von Elektronen, die zur Zeit $t = \tau$ einen Stoß erlitten haben. Wir nehmen an, daß durch diesen die mittlere (geometrische) Geschwindigkeit Null geworden ist: $\overline{\mathfrak{v}}_e(t = \tau) = 0$.

Wegen der Linearität der Bewegungsgleichung gehorcht ihr auch die mittlere Bewegung. Wir können nun die Gesamtheit der Elektronen in Gruppen zerlegen nach dem Zeitpunkt, in dem sie das letzte Mal gestoßen haben, und die mittlere Geschwindigkeit jeder Gruppe zur Zeit t berechnen:

$$\overline{\mathfrak{v}}_e(t, \tau), \quad t > \tau.$$

Sind die Feldstärken so gering, daß im allgemeinen der Geschwindigkeitszuwachs eines Elektrons zwischen zwei Stößen gering gegenüber seiner (thermischen) Geschwindigkeit ist, und erfolgen die Stöße nachwirkungsfrei, so ist für jedes Elektron zu jeder Zeit die Wahrscheinlichkeit, einen Stoß zu erleiden, gleich groß, etwa gleich γ [$\sec^{-1}$]; und von den Elektronen, die zur Zeit $\tau = t - \vartheta$ ihren letzten Stoß erhalten haben, ist zur Zeit t noch der Bruchteil

$$e^{-\gamma\vartheta} = e^{-\gamma(t-\tau)}$$

vorhanden. Die mittlere Geschwindigkeit *aller* Elektronen ergibt sich als das hiermit gewichtete Mittel der Gruppenmittel:

$$\mathfrak{V}_e(t) = \overline{\overline{\mathfrak{v}}}_e(t) = \gamma \int_0^\infty e^{-\gamma\vartheta}\,\overline{\mathfrak{v}}_e(t, t-\vartheta)\,d\vartheta, \quad t - \vartheta = \tau,$$

wobei der Faktor γ durch die Normierung entsteht.

$\mathfrak{V}_e(t)$ genügt nun *nicht* der Bewegungsgleichung, da bei der zeitlichen Differentiation $\overline{\mathfrak{v}}(t, t-\vartheta)$ jetzt nach beiden Argumenten differentiert werden muß. Die Differentiation nach dem ersten Argument liefert das Mittel der Beschleunigung, während die zweite Differentiation (nach der Zeit des Stoßes) einer Differentiation nach $-\vartheta$ äquivalent ist, die nach dem Differentiationssatz der Laplace-Transformation, oder durch partielle Integration eine Multiplikation mit γ ergibt:

$$\frac{d}{dt}\mathfrak{V}_e(t) = \overline{\overline{\frac{d}{dt}\mathfrak{v}_e}} + \gamma\,\mathfrak{V}_e.$$

Dies entspricht aber bei Berücksichtigung der Ionenbewegung gerade unserem Ansatz (3).